**Ecuaciones Diferenciales**

Es una expresión donde la **incógnita es una función**

**Hay ecuaciones diferenciales de 2 tipos:**

* **De 1 Variable** (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias)
* **De más de 1 Variable** (Ecuaciones Diferenciales con Derivadas Parciales)

**Teoría de Aproximación**

**(Caso Discreto)**

Tenemos el conjunto de **Puntos**  y el conjunto de **Funciones** . Se trata de hallar coeficientes tales que la función sea la “mejor” aproximación **a los puntos**

Tomemos **Y**

Donde la **entrada ,** de modo que

Por otro lado , donde .

Por un **resultado del producto interno en álgebra lineal**, el vector es la **mejor aproximación** a si para , esto es, para , de modo que , de donde **.**

De donde

**Integración Numérica**

La **integración numérica** constituye una amplia gama de algoritmos para **calcular el valor** numérico de una **integral definida**.

Sea **continua** y sea una partición del **intervalo**

Sea el **polinomio interpolante de Lagrange** en los **puntos** , esto es , donde:

Una **aproximación** a está dada por:

Donde

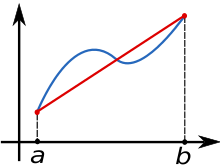
Tomemos ahora y sea , entonces

Hacemos un **Cambio de Variable**, tomemos , entonces:

**Esto es:**

Donde

**Método del Trapecio**



* **Con n=1**, va a tomar los valores 0 y 1

**Ahora según el método:**

**Método de Simpson 1/3**

* Con **n=2**:

**Método de Simpson 3/8**

* Con **n=3**

**Error en la Integración**

**En Lagrange el error era:**

**Entonces en la Integral:**

**Si n es par:**

**Error en el Trapecio:**

**Error en Simpson 1/3:**

**Error en Simpson 3/8:**

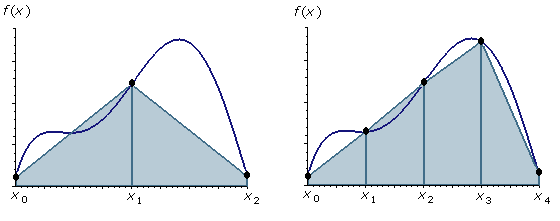
**Integración Numérica Compuesta**

En términos generales, las **fórmulas de Newton-Cotes** no son adecuadas para utilizarse en intervalos de integración grandes.

Para estos casos se requieren **fórmulas de grado superior** y además, las **fórmulas de Newton-Cotes** se basan en los **polinomios interpolantes**, que resultan inexactos en intervalos grandes debido a la naturaleza oscilatoria de los polinomios de grado superior. En esta sección estudiaremos un método **fragmentario** para realizar la integración numérica.

**Método del Trapecio Compuesto**

Una forma de mejorar la precisión de la **regla del trapecio** consiste en **dividir el intervalo** de integración [a; b] en **varios segmentos**, y aplicar el método del trapecio en cada intervalo.



**Método del Trapecio:**

**Método del Trapecio Compuesto:**

**Método de Simpson Compuesto**

La regla de Simpson se mejora al dividir el intervalo de integración en varios segmentos de un mismo tamaño, a los intervalos tengo que tomarlos de pares (tienen que haber un número par de intervalos), es decir, cada 2 subintervalos aplico Simpson

**La Condición es que:**

**Método de Simpson:**

**Método de Simpson Compuesto:**

**Método de Simpson 3/8 Compuesto**

Es más exacta que la regla de Simpson 3/8 simple, ya que divide el intervalo de integración en más subintervalos.

**Método de Simpson 3/8:**

**Método de Simpson 3/8 Compuesto:**

**Teoría de Aproximación**

**(Caso Continuo)**

En el caso discreto teníamos puntos y aproximábamos a puntos, en cambio en el caso continuo, tenemos una función y queremos aproximar a una función.

Sea y sea , el producto interno en dado por:

Donde continua

**El problema es el siguiente:**

Dada y una **familia de funciones**  con  **continua**, queremos hallar **coeficientes** tales que (la distancia) sea mínima, donde

**De esta forma evitamos trabajar con raíces**

**Entonces:**

, entonces

Como queremos **hallar el mínimo** de la **función** , una condición necesaria es que la derivada parcial , para

Entonces , esto es: , esto es:

Como no está acotada superiormente, **tiene mínimo**.

Y se obtiene el siguiente **sistema de ecuaciones normales:**

**Otra Forma sin tener que Resolver Sistemas de Ecuaciones**

Sea un producto interno en . Un conjunto ortogonal cumple la condición que (perpendicular) si  **para todo** .

Sea ahora un conjunto ortogonal y sea , entonces:

**De donde:**

Esta es la fórmula para obtener los coeficientes de la ecuación.

**Procedimiento de Ortogonalización de Gram-Schmidt**

Sea un conjunto linealmente independiente en y sea un producto interno en ese conjunto . A partir de se obtiene un **subconjunto** **ortogonal**  de la siguiente forma:

Sea

**Polinomios de Tchebyshev**

Para y **,** sea

Para cada , es un polinomio de **grado**  llamado polinomio de Tchebyshev de **grado**

**Veamos que es un polinomio de grado :**

Sea , entonces:

**Y**

**Sumando miembro a miembro:**

**Volviendo a :**

**De donde:**

**Entonces:**

**Ortogonalidad de los Polinomios de Tchebyshev**

Los **polinomios de Tchebyshev**  son **ortogonales** con el producto interno

, donde

**Veamos esto:**

Sean con , entonces:

Hacemos el **cambio de variable** , entonces:

**Integramos por partes:**

**Entonces:**

**Integramos por partes:**

**Por lo tanto:**

**De donde:**

Como (porque y , pertenecen a los naturales entonces no pueden ser negativos) tenemos que:

**Por lo tanto son Ortogonales**

**Intervalo Arbitrario**

Los **polinomios de Tchebyshev** funcionan en el **intervalo** , queremos usarlos en un intervalo

Partimos de conjunto ortogonal en con producto interno dado por: donde

Los **polinomios de Tchebyshev** se describen como:

**Para extenderlos a un intervalo arbitrario planteamos:**

En donde la **función**  transforma el intervalo en

**Entonces:**

Las funciones son polinomios ortogonales en el **intervalo**  con el producto interno , puesto que:

Hacemos el cambio de variable , entonces:

**En cualquier intervalo son Ortogonales**